UToyoGSC 基礎の学習

微分・積分

改訂版

2019年10月26日（土）

東京大学 生産技術研究所 准教授
川越至桜

駒場東大前から・・・

●生産技術研究所まで、何分かかりましたか？
　駒場東大前から生産技術研究所まで：700m

例：歩いて10分かかったとすると、歩く速さは？
　700÷10＝70［m/分］
　700÷10÷60≒1.167［m/秒］
　瞬間の速さは？

ある瞬間の「変化の度合い」を知る方法

↓

微分

生産技術研究所から・・・

●東北沢駅まで、12分かかりました。

例：歩く速さが70[m/分]だとすると、
生産技術研究所から東北沢駅までの距離は？
$70 \times 12 = 840$[m]
歩いた距離は？

何かの量を積み重ねることで全体像を求める方法

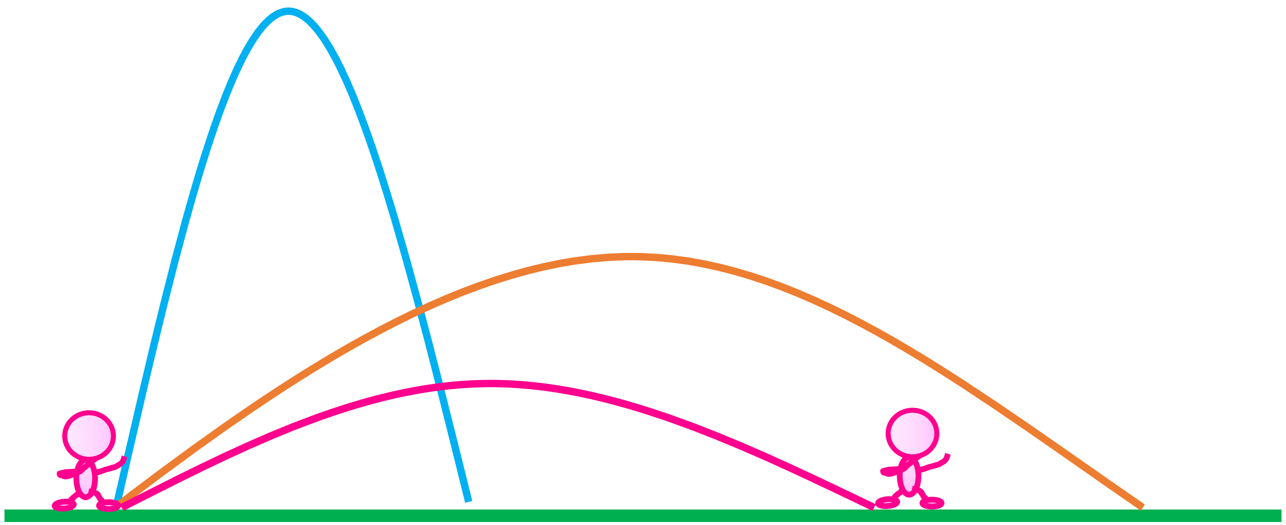
↓

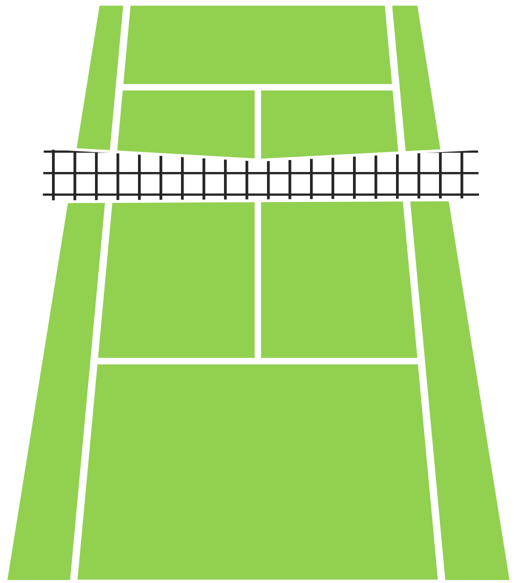
積分

東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

テニスをしています

●20m先の相手にボールを打ち返したいとき、
どのくらいの角度でボールを打てばよいのだろう？





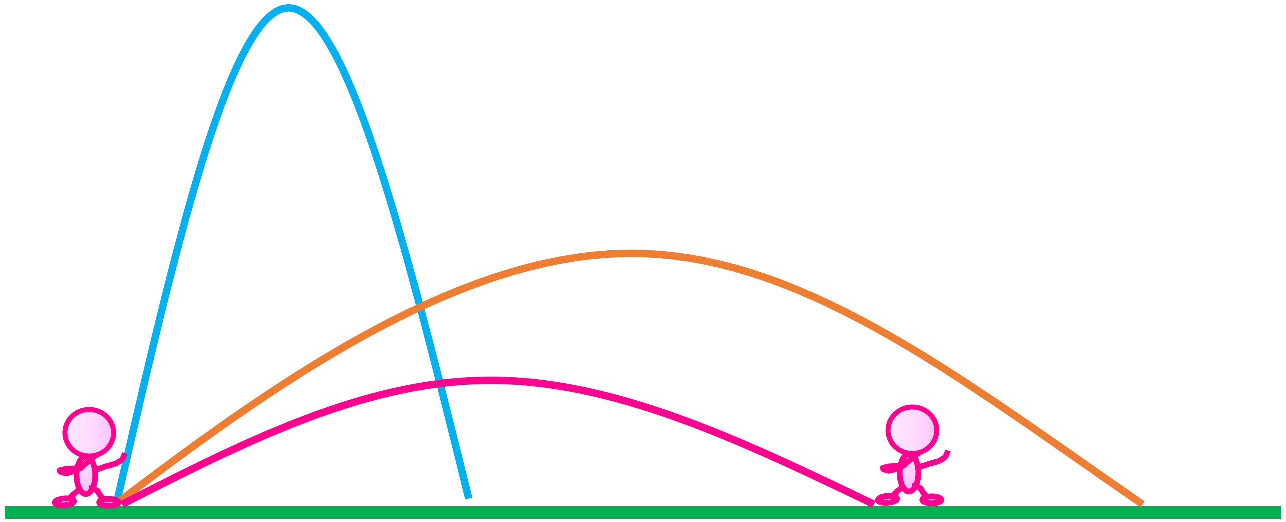
放物線という「全体」から
スタートのときの角度という「瞬間」を割り出す

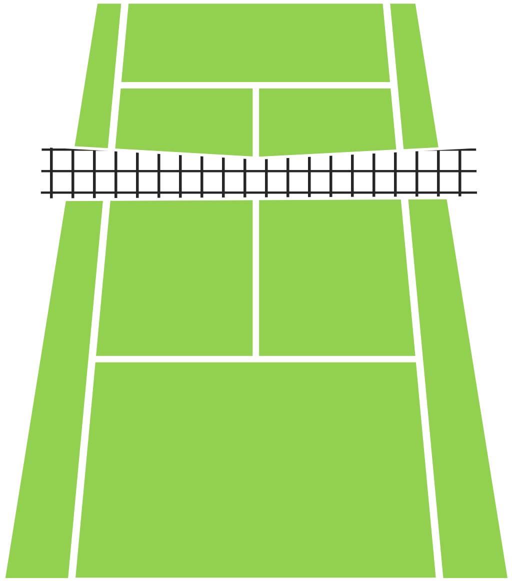
微分

UTokyoGSC

テニスをしています

●地面に対して30°の角度でボールを打ち返したい
ボールはどこまで飛ぶのだろう？



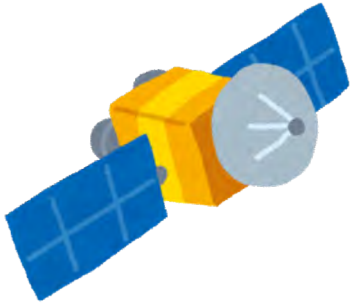


スタートのときの角度という「瞬間」から
放物線という「全体」を割り出す

↓

積分

微分積分は大活躍！



微分積分を使っているものは

- ●惑星探査機の軌道

- ●古生物の化石の年代測定
- ●金融市場を扱う金融工学

- ●台風の進路予測

微分積分は、
変化にあふれたこの世界を知る（記述する）ために
なくてはならないモノ！！！

関数

関数：ある変数xとyとの関係を表す関係式

例：　$y = x^2 + 1$

従属変数

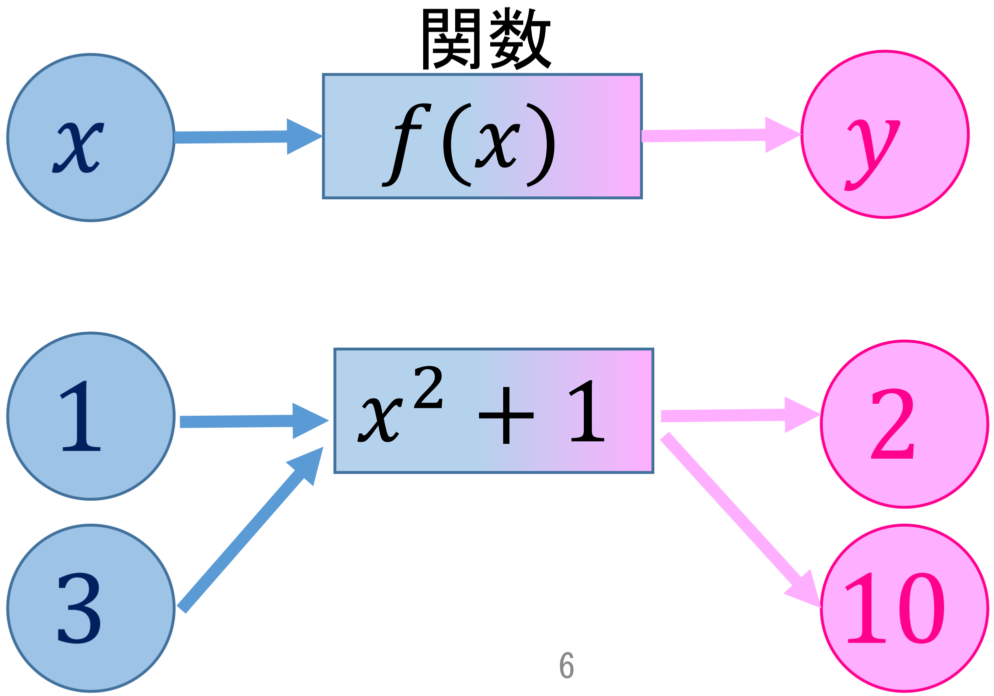
ある値を決めると値が決まる変数

ここではyとする

独立変数

自由に変えることのできる変数

ここではxとする



平均の速さ

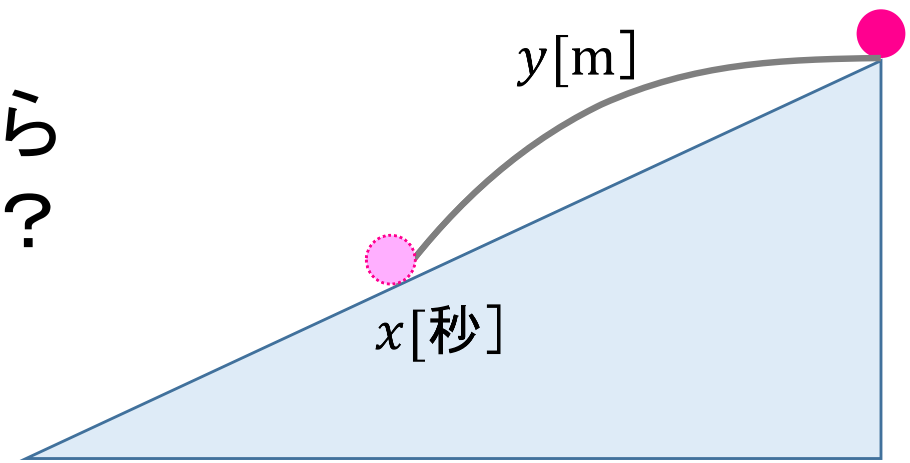
例：「平均の速さ」を考えてみよう！
ある斜面では下記の関係が成り立っている。
この関数を$y = f(x)$とする。

$$y = x^2$$

転がった距離：y[m]　　球が転がりはじめてからの時間：x[秒]

問：球が転がり始めて3秒後から
5秒後までの平均の速さは？

$$\frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{25 - 9}{5 - 3} = 8 \ \text{[m/s]}$$

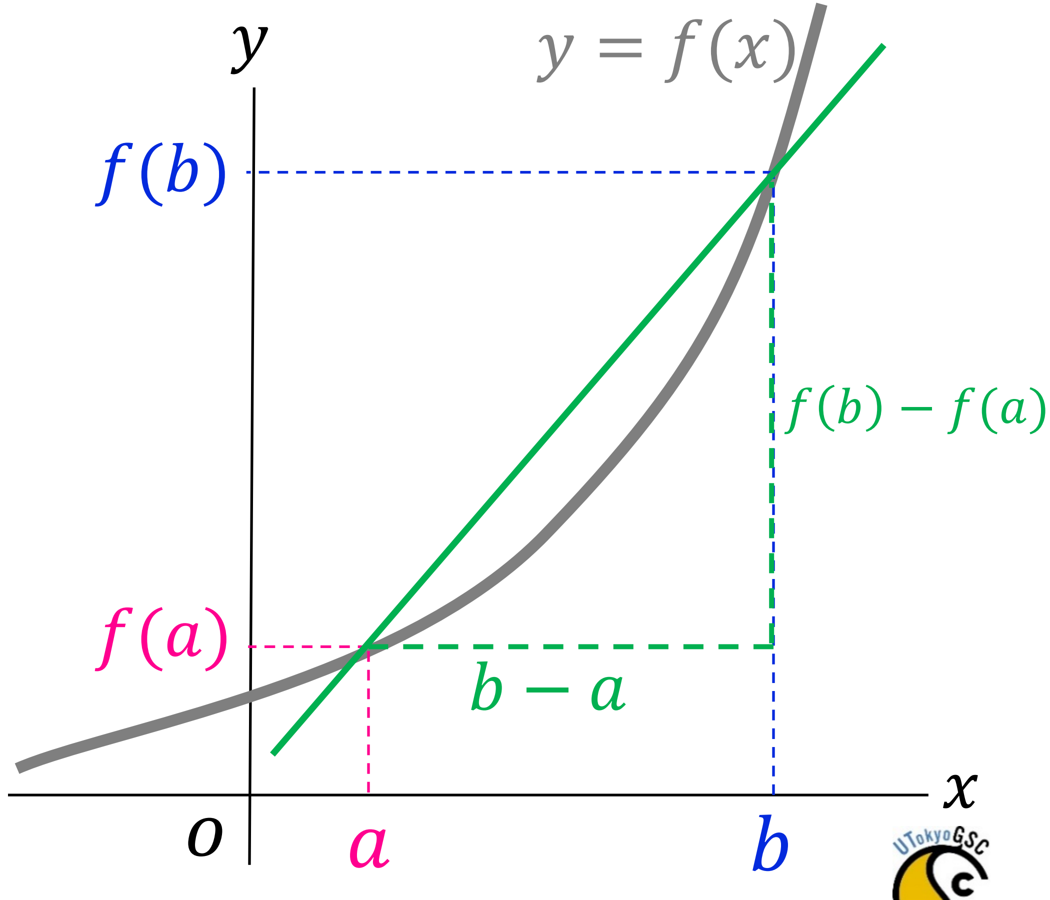


平均変化率

例：一般の関数 $y=f(x)$ で考えてみよう。

xの値がaからbまで
変化するとき
$y=f(x)$ の平均変化率

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



瞬間の速さ

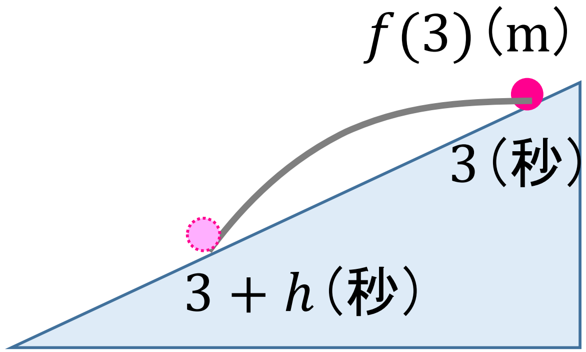
例：ある斜面では $y = x^2$ の関係が成り立っている。
　　この関数を $y = f(x)$ とする。

転がった距離：y[m]　　球が転がりはじめてからの時間：x[秒]

球が転がり始めて3秒後から $3+h$ 秒後までの平均の速さは？

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{(3+h)-3} = \frac{(3+h)^2-3^2}{h} = 6+\mathrm{h} \quad (\mathrm{m}/s)$$

（ただし、$h \neq 0$）



では、この h を限りなく0に近づけると？

瞬間の速さ

例：前のページ平均の速さ$(6+h)$のhを0に近づけると？

h	$\cdots$	-0.1	-0.01	-0.001	$\cdots$	(0)	$\cdots$	0.001	0.01	0.1	$\cdots$
$6+h$	$\cdots$	5.9	5.99	5.999	$\cdots$	(6)	$\cdots$	6.001	6.01	6.1	$\cdots$

平均の速さは、6に近づく

↓

球が転がりはじめて3秒後の「瞬間の速さ」

を表していると考えてよい

極限値

●関数$f(x)$ において、xが限りなくaに近づくとき、
$f(x)$ がαに近づくならば、

α は x がaに限りなく近づくときの$f(x)$ の極限値という。

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

例：下記の極限値は？

(1) $\lim_{x \to 4}(2x+3) = 11$

(2) $\lim_{x \to 1}(x^2 - 5) = -4$

極限値

例：前のページ $y = x^2$のとき、
「球が転がり始めて3秒後の瞬間の速さ」を
極限値を用いて表す。

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - h(3)}{h} = \lim_{h \to 0}(6+h) = 6 \quad (\mathrm{m/s})$$

微分係数

●関数$y=f(x)$において、xがaから$a+h$まで変わるとき

平均変化率 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$h\to 0$のとき、平均変化率がある値に限りなく近づくならば、その**極限値**を
$y=f(x)$ の$x=a$ における**微分係数**
という。

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-h(a)}{h}$$

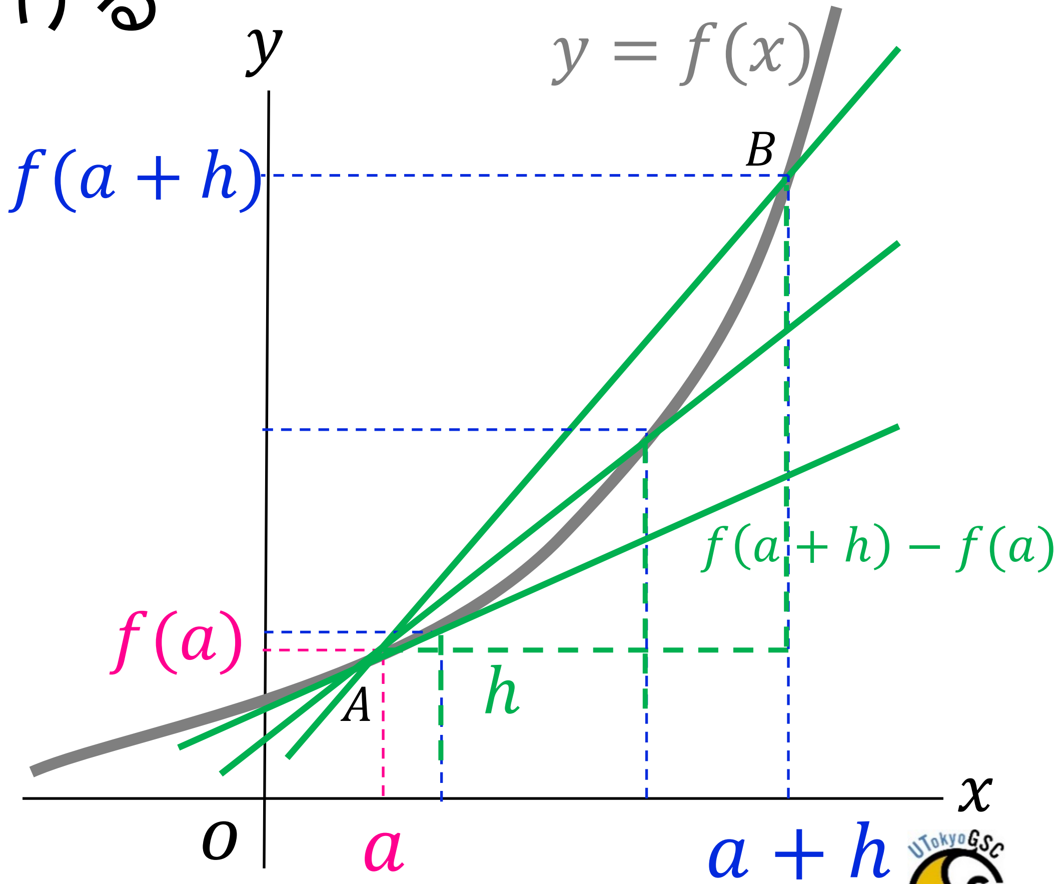
微分係数の図形的意味

●微分係数$f'(x)$

$y=f(x)$の点$\left(a,f(a)\right)$における

接線の傾き

に等しい。



微分係数

例：$f(x) = 2x^2$について

(1) $x = 1$における微分係数

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - h(1)}{h} = \frac{2(1+h)^2 - 2(1)^2}{h} = 4$$

(2) $x = 4$における微分係数

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - h(4)}{h} = \frac{2(4+h)^2 - 2(4)^2}{h} = 16$$

(3) $x = a$における微分係数

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - h(a)}{h} = \frac{2(a+h)^2 - 2(a)^2}{h} = 4a$$

東京大学 THE UNIVERSITY OF TOKYO

導関数と微分

●$f(x)$について$x=a$における微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-h(a)}{h}$$

aの値を変えると$f'(a)$の値も変わる→ $f'(a)$はaの関数

aをxに置き換えた $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-h(x)}{h}$$

導関数を求めることを「微分する」という。

●$y=f(x)$の導関数の表し方 $f'(x),\ y'$, $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d}{dx}f(x)$

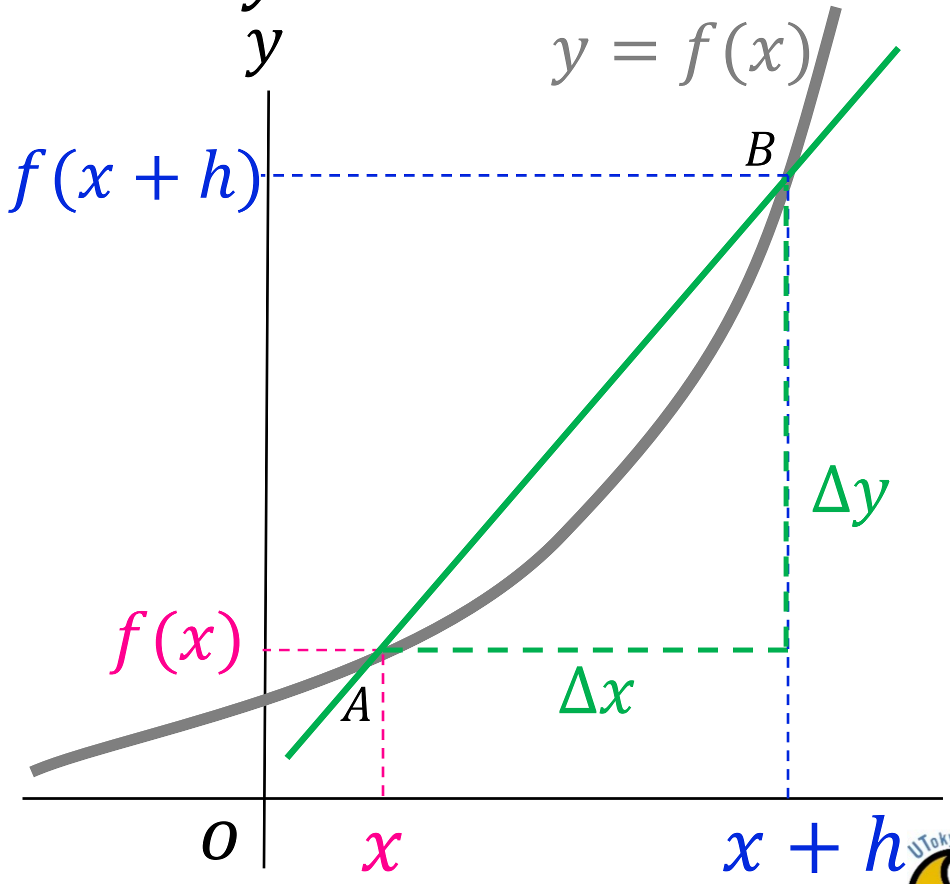
ラグランジュの記法　ライプニッツの記法

導関数と微分

●hはxの変化量→Δx
$f(x+h)-f(x)$ はyの変化量→Δy

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$



微分可能な条件
- $f(x)$ は連続
- $f'(x)$の値が一つに定まる

関数の微分

●一般に、次の式が成り立つ

$$(x^n)=nx^{n-1} \quad （n\text{は整数}）$$

例：次の関数を微分してみよう。

(1) $f(x)=x$

$n=1$なので

$f'(x)=1x^{1-1}$

$=1$

(2) $f(x)=x^2$

$n=2$なので

$f'(x)=2x^{2-1}$

$=2x$

(3) $f(x)=x^3$

$n=3$なので

$f'(x)=3x^{3-1}$

$=3x^2$

物体の運動と微分

例：ある斜面を転がる物体の位置[m]を時間t[s]の関数で表すと以下の関係になっている。

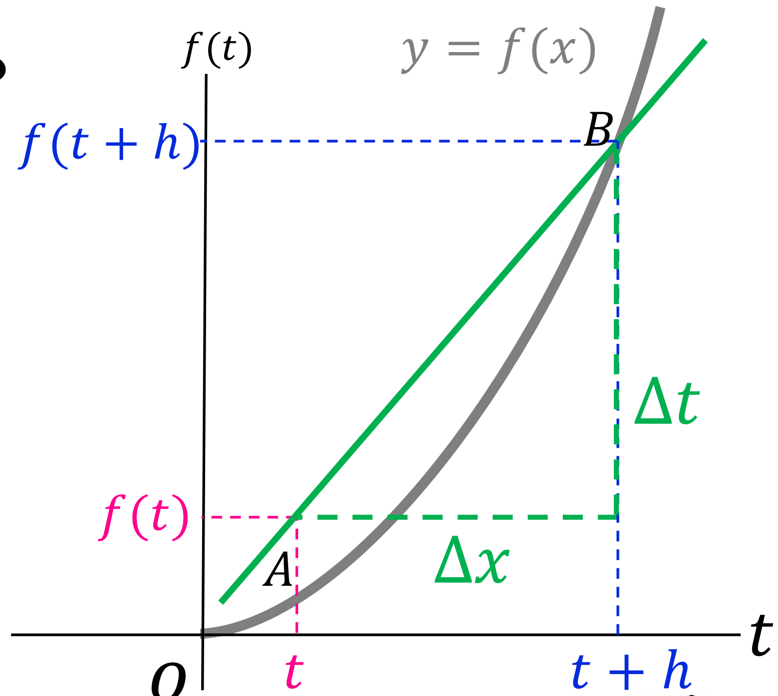
$$f(t) = \frac{1}{2}at^2$$

ある時間での瞬間の速さv[m/s]は？

↓

$h \to 0$のときの位置の変化率

位置を微分すれば
瞬間の速さが求められる



物体の運動と微分

例：ある斜面を転がる物体の位置[m]を時間t[s]の関数で表すと以下の関係になっている。

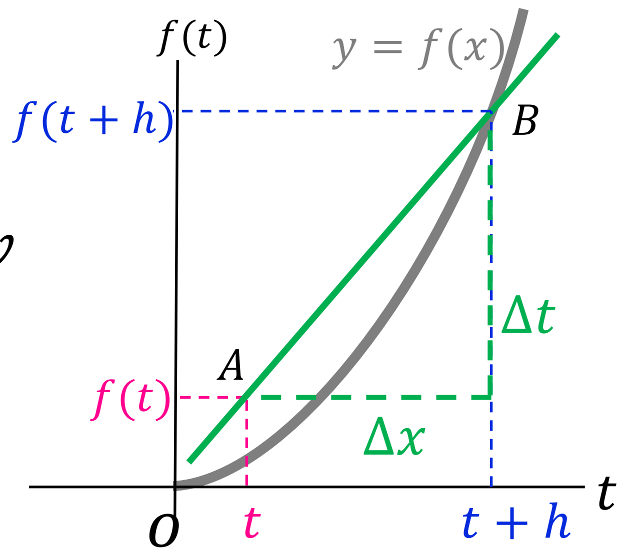
位置：$f(t)=\frac{1}{2}at^2$　　$x=\frac{1}{2}at^2$

微分の逆は？　　微分

速さ：$f'(t)=at$　　$\frac{dx}{dt}=at\ \rightarrow v$

微分の逆は？　　微分

加速度：$f''(t)=a$　　$\frac{dv}{dt}=a$



原始関数

●微分して$f(x)$になる関数

$$\mathrm{F}'(x) = f(x)$$

となる関数$\mathrm{F}(x)$を、$f(x)$ の原始関数という。

例：$(x^2)' = 2x$ となるので、x^2 は $2x$ の原始関数。

他には：$x^2+5,\ x^2+\frac{1}{3},\ x^2-6$　原始関数は無限に存在

$$2x \xleftarrow{\text{微分}} \underbrace{x^2 + \text{定数}}_{\text{原始関数}}$$

東京大学 THE UNIVERSITY OF TOKYO

不定積分

●$f(x)$の任意の原始関数を$F(x)+C$とする。

$f(x)$の不定積分：

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

（Cは積分定数）

$f(x)$ の不定積分を求めることを「積分する」という。
$\int$ はインテグラルと読む。

例：$(x^2)' = 2x$ となるので

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

（Cは積分定数）

$$2x \xleftarrow{\text{微分}} x^2 + C$$

$$2x \xrightarrow[\text{積分}]{} x^2 + C$$

東京大学 THE UNIVERSITY OF TOKYO

不定積分

●一般に次の式が成り立つ。

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (C\text{は積分定数})$$

例：下記を積分してみよう。

(1) 1

$$\int 1dx = \frac{1}{0+1} x^{0+1} + C = x + C$$

(2) x

$$\int xdx = \frac{1}{1+1} x^{1+1} + C = \frac{1}{2} x^2 + C$$

(3) x^2

$$\int x^2 dx = \frac{1}{2+1} x^{2+1} + C = \frac{1}{3} x^3 + C$$

(4) x^3

$$\int x^3 dx = \frac{1}{3+1} x^{3+1} + C = \frac{1}{4} x^4 + C$$

（Cは積分定数）

不定積分

例：下記を積分してみよう。

(1) $\int (3x^2 - 6x + 4)\ dx$

$$= 3\int x^2\,dx - 6\int xdx + \int 4dx$$

$$= 3\cdot\frac{1}{3}x^3\ - 6\cdot\frac{1}{2}x^2 + 4x + C$$

$$= x^3 - 3x^2 + 4x + C$$

(2) $\int (9x^2 - 7x - 1)\ dx$

$$= 9\int x^2\,dx - 7\int xdx - \int dx$$

$$= 9\cdot\frac{1}{3}x^3\ - 7\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + C$$

$$= 3x^3 - \frac{7}{2}x^2 - x + C$$

(3) $\int (x+1)(4x-1)\ dx$

$$= \int (4x^2 + 3x - 1)\,dx = 4\cdot\frac{1}{3}x^3\ - 3\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + C = \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x + C$$

（Cは積分定数）

定積分

例：関数$f(x) = 3x^2$の原始関数$F(x)$は？

$$F(x) = \int 3x^2\ dx = x^3 + C$$

$F(x)$の2つの値の差$F(b) - F(a)$を求めてみる

$$F(b) - F(a) = (b^3 + C) - (a^3 + C)$$
$$= b^3 - a^3$$

←Cに無関係な値

$f(x)$のaから b までの定積分

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

定積分と面積

例：速さと時間から距離を求めてみよう

0〜5秒まで：12.5[m]

$\int_0^5 x\,dx = [\frac{1}{2}x^2]_0^5 = 12.5$

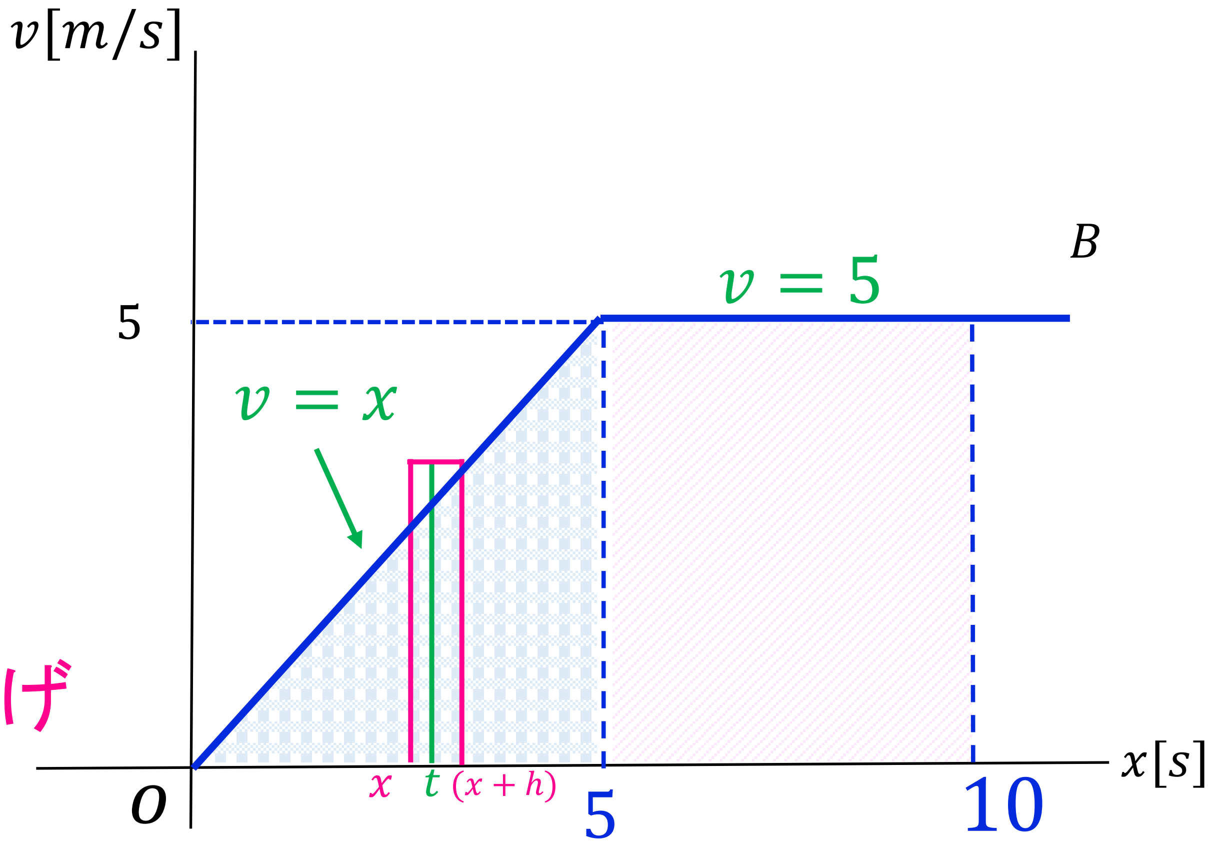
5〜10秒まで：25[m]

$\int_5^{10} 5\,dx = [5x]_5^{10} = 25$

微小なものを積み上げ
面積を求める

⇩

積分



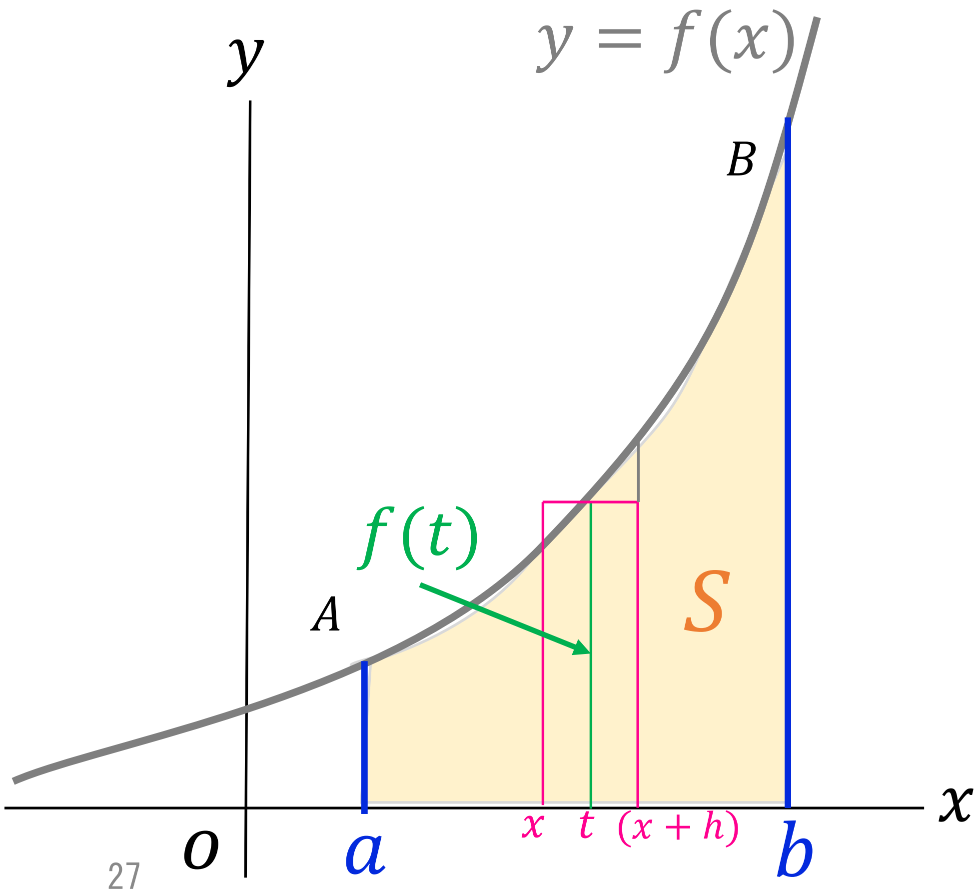
定積分と面積

●関数$y=f(x)$の$x=a$から$x=b$の区間の定積分は

- $x=a$、$x=b$でx軸に垂直に引いた直線
- x軸
- $y=f(x)$

に囲まれた面積S

$$S=\int_a^b f(x)dx$$



物体の運動と微分

例：ある斜面を転がる物体の位置(m)を時間t(s)の関数で表すと以下の関係になっている。

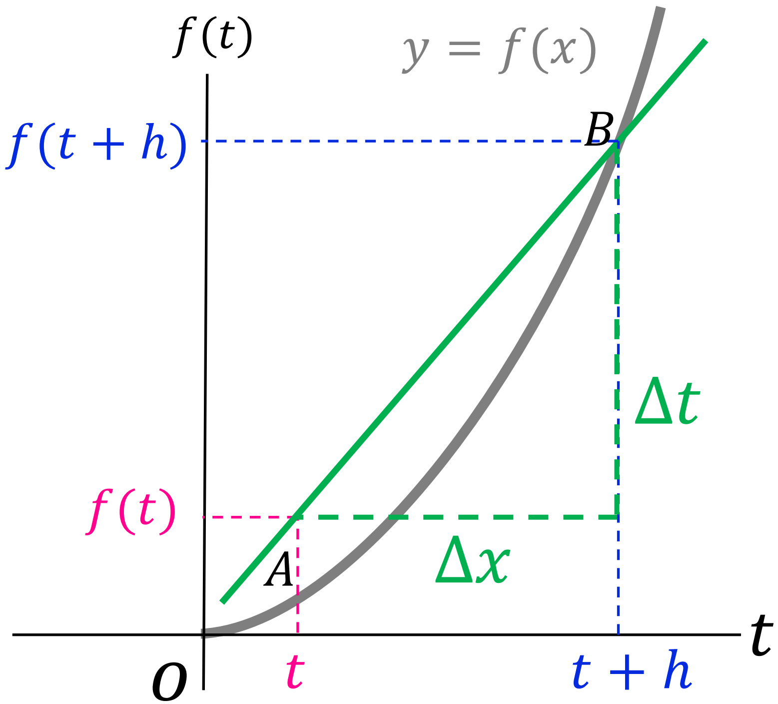
位置：$f(t) = \dfrac{1}{2}at^2$

積分 ↑　↓ 微分

速さ：$f'(t) = at$

積分 ↑　↓ 微分

加速度：$f''(t) = a$



微分と積分の関係

●微分と積分の関係

$$F'(x) = f(x)$$

のとき、

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$ （Cは積分定数）

17世紀の物理学者アイザック・ニュートンは「微分と積分」の関係が自然界を記述する基本的なルールであると気づき、微積分学という新しい数学を生み出しました。

ウィーン自然史博物館のニュートン像
（写真：川越至桜）

物理量と物理法則

●物理量：計測可能で、数値で表される量

●物理法則：物理量と物理量の関係(式)
多くは微分を用いて記述される
↓
微分で表された物理量を知るには
積分する

$$F'(x) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

運動の法則

●運動の法則：物体の様子を決める基本法則

（ニュートンの運動の法則）

第一法則 【慣性の法則】

力を受けない物体は静止または等速直線運動をする

第二法則 【運動の法則 】

速度vの変化率は物体に加わる力Fに比例し、質量mに反比例する

$$ma = F$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

第三法則 【作用反作用の法則】

物体が互いに力を及ぼし合うときには同一直線上で互いに逆向き・同一の大きさの力が働く

現象のモデル化

コーヒーが冷める！

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_e)$$

現象 —モデル化→ モデル

モデル —計算→ 解

解 —解釈→ 現象の説明

現象の説明 ←適用→ 現象

コーヒーは時間とともに
$T(t)$のように冷えていくのか・・・

$$T(t) = (T_0 - T_e)e^{-kt} + T_e$$

現実の世界

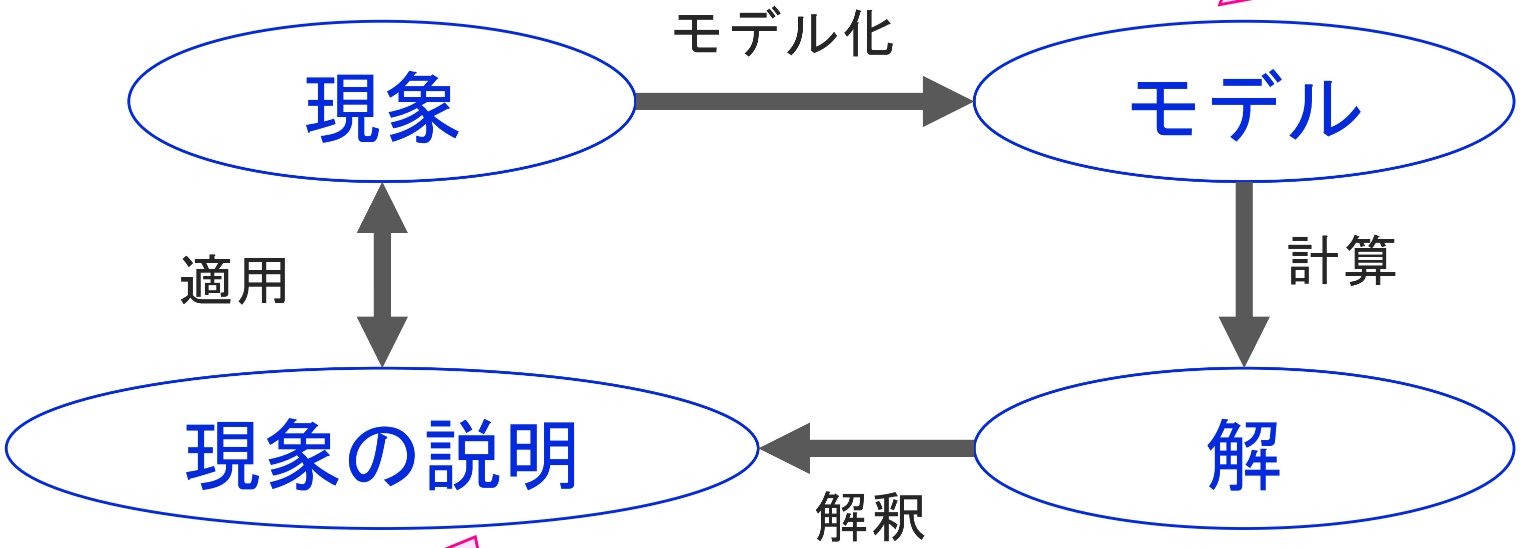
数学の世界

東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

現象のモデル化2

ロケットを飛ばそう！

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_0 e^{-\frac{t}{\tau}} - mg$$



ロケットの位置は時間とともに
このように変化するのか・・・

$$y = \frac{F_0\tau^2}{m} e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2$$

現実の世界

数学の世界

UTokyoGSC

微分方程式に挑戦?!

●微分方程式（大学レベル！）：
独立変数・従属変数・従属変数の微分を含んだ等式

例：

$$y' + 2xy = 0$$

従属変数の微分　独立変数　従属変数

●微分方程式を解く：
与えられた微分方程式を満足し、かつ、
微分を含まないxとyの関係を見出すこと

例：$y' + 2xy = 0$ を解くと $\ln|y| = -x^2 + C'$

まとめ

○ある瞬間の「変化の度合い」を知る方法：微分

○何かの量を積み重ねることで全体像を求める方法：積分

○物理量や物理量の関係(式)の多くは微分を用いて
記述される

○微分と積分の関係

$F'(x) = f(x)$ のとき $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ （Cは積分定数）

現象を表すには数学が便利！

参考文献

〇東京図書「微分積分」、砂田利一

〇裳華房「微分方程式と数理モデル」遠藤雅守・北林照幸

〇ニュートンプレス「Newton」2018年11月号

〇東京書籍「数学II」、俣野博・河野俊丈

〇東京書籍「物理IB」