線形代数の世界を
ちょっと覗いてみよう

沈晨晨

10月26日

クイーズ！

下記のどれが「線形代数」の知識を使っていると思いますか？

①電気回路の計算
②人口統計
③産業関連分析
④グーグルのページランク
⑤SF映画
⑥天気のシミュレーション

線形代数とは

厳密な定義：

線形写像（線形関数）を解析するための理論の総称。

分かりやすい解釈：

１次式を扱う代数。

例えば、$y=4x-3 \quad 2x+3y-1=0$

3つの製品A、B、Cの売上数量が分からなくなってしまった場合を考える。
カタログ表は残っていて、それぞれの単価、単重（1つ当たりの重さ）、
単体（1人当たりの箱の体積）は分かっており、次のようになっている。

$$\begin{array}{c} \\ \text{単価} \\ \text{単重} \\ \text{単体} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{製品A} & \text{製品B} & \text{製品C} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1\text{万円/台} & 2\text{万円/台} & 1\text{万円/台} \\ 1\text{kg/台} & 4\text{kg/台} & 3\text{kg/台} \\ 1\text{m}^3\text{/台} & 1\text{m}^3\text{/台} & 7\text{m}^3\text{/台} \end{pmatrix} \end{array}$$

ここでさらに、総売上高が8万円、総重量が18kg、総体積が24 m^3である
ことは分かっているとする。
このとき、製品A、B、Cの売上台数を知るには？

次の連立１次方程式をつくれる

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ x + 4y + 3z = 18 \\ x + y + 7z = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x + 2y + z = 8 & ① \\ 1x + 4y + 3z = 18 & ② \\ 1x + 1y + 7z = 24 & ③ \end{cases} \xrightarrow[③+①×(-1)]{②+①×(-1)} \begin{cases} 1x + 2y + 1z = 8 & ① \\ 0x + 2y + 2z = 10 & ② \\ 0x - 1y + 6z = 16 & ③ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{② \times \frac{1}{2}} \begin{cases} 1x + 2y + 1z = 8 & ① \\ 0x + 1y + 1z = 5 & ② \\ 0x - 1y + 6z = 16 & ③ \end{cases} \xrightarrow[③+②×1]{①+②×(-2)} \begin{cases} 1x + 0y - 1z = -2 & ① \\ 0x + 1y + 1z = 5 & ② \\ 0x + 0y + 7z = 21 & ③ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{③ \times \frac{1}{7}} \begin{cases} 1x + 0y - 1z = -2 & ① \\ 0x + 1y + 1z = 5 & ② \\ 0x + 0y + 1z = 3 & ③ \end{cases} \xrightarrow[②+③×(-1)]{①+③} \begin{cases} 1x + 0y + 0z = 1 & ① \\ 0x + 1y + 0z = 2 & ② \\ 0x + 0y + 1z = 3 & ③ \end{cases}$$

$$x = 1 \quad y = 2 \quad z = 3$$

係数だけを集めた行列での変形と考えてみると？

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 8\\1 & 4 & 3 & 18\\1 & 1 & 7 & 24\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 8\\0 & 2 & 2 & 10\\0 & -1 & 6 & 16\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 8\\0 & 1 & 1 & 5\\0 & -1 & 6 & 16\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -2\\0 & 1 & 1 & 5\\0 & 0 & 7 & 21\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\0 & 1 & 1 & 5\\0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

行列 数を長方形に並べてカッコを付けたもの

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{1列目} & \text{2列目} & \text{3列目}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{1行目}\\ \text{2行目}\end{array} & \begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix}\end{array}$$

行列のサイズ：2×3

5は(1,3)成分という

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 6 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}8 & 1 & 6\\ 3 & 5 & 7\\ 4 & 9 & 2\end{pmatrix}$$

正方行列

$$\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}3\\ 1\\ 4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

単位行列

行列の性質を見てみよう

次の表は三つの店舗において、
テレビ、パソコンの在庫数を表に表した。

表 1

	テレビ	パソコン
池袋店	15	9
新宿店	14	7
駒場店	12	8

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{15} & \mathbf{9} \\ \mathbf{14} & \mathbf{7} \\ \mathbf{12} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

①もし表１の各店舗が、
さらに次の表のように商品を仕入れたら

	テレビ	パソコン
池袋店	3	1
新宿店	1	2
駒場店	4	5

行列の和は同じ成分同士の和をとる

それぞれの店舗の在庫の合計はどうなるか？

$$\begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 14 & 7 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15+3 & 9+1 \\ 14+1 & 7+2 \\ 12+4 & 8+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 10 \\ 15 & 9 \\ 16 & 13 \end{pmatrix}$$

②もし表1の各店舗の売上が次のようであったとしたら

	テレビ	パソコン
池袋店	5	3
新宿店	3	2
駒場店	2	4

行列の差は同じ成分同士の差をとる

それぞれの店舗の在庫の合計はどうなるか？

$$\begin{pmatrix} \mathbf{15} & \mathbf{9} \\ \mathbf{14} & \mathbf{7} \\ \mathbf{12} & \mathbf{8} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{15-5} & \mathbf{9-3} \\ \mathbf{14-3} & \mathbf{7-2} \\ \mathbf{12-2} & \mathbf{8-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{6} \\ \mathbf{11} & \mathbf{5} \\ \mathbf{10} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

東京大学 THE UNIVERSITY OF TOKYO

UTokyoGSC

練習：次の計算をしなさい

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

行列の計算法則

A,B,Cを同じ型の行列とすると、行列の和について

A＋**B**＋**C**＝**A+(B+C)**

A+B=B+A

k,l を実数とすると、行列の定数倍について

k**(A+B)=** k **A+** k **B**

k(l **A)=(**k l**)A**

1・**A=A**

0・**A=**0

③もし表1のテレビ、パソコンの仕入れ価格をそれぞれ10万円、20万円とすると、各店舗の商品価格の合計は？

	商品価格の合計
池袋店	
新宿店	
駒場店	

$$\begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 14 & 7 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (15\ \ 9) & \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} \\ (14\ \ 7) & \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} \\ (12\ \ 8) & \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15\times10+9\times20 \\ 14\times10+7\times20 \\ 12\times10+8\times20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 330 \\ 280 \\ 280 \end{pmatrix}$$

④もし表1のテレビ、パソコンの仕入れ価格をそれぞれ12万円、22万円とすると、各店舗の商品価格の合計は？

	商品価格の合計
池袋店	
新宿店	
駒場店	

$$\begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 14 & 7 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (15\ \ 9) & \begin{pmatrix} 12 \\ 22 \end{pmatrix} \\ (14\ \ 7) & \begin{pmatrix} 12 \\ 22 \end{pmatrix} \\ (12\ \ 8) & \begin{pmatrix} 12 \\ 22 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15\times 12+9\times 22 \\ 14\times 12+7\times 22 \\ 12\times 12+8\times 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 378 \\ 322 \\ 320 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r}\text{1行目}\\ \\ \text{3行目}\end{array}\begin{pmatrix}15 & 9\\ 14 & 7\\ 12 & 8\end{pmatrix}\begin{array}{cc}\text{1列目} & \text{2列目}\\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix}10 & 12\\ 20 & 22\end{pmatrix}}\end{array}=\begin{pmatrix}(15\quad 9)\begin{pmatrix}10\\ 20\end{pmatrix} & (15\quad 9)\begin{pmatrix}12\\ 22\end{pmatrix}\\ (14\quad 7)\begin{pmatrix}10\\ 20\end{pmatrix} & (14\quad 7)\begin{pmatrix}12\\ 22\end{pmatrix}\\ (12\quad 8)\begin{pmatrix}10\\ 20\end{pmatrix} & (12\quad 8)\begin{pmatrix}12\\ 22\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\overbrace{\boxed{15\times 10+9\times 20}}^{\text{(1,1)成分}} & 15\times 12+9\times 22\\ 14\times 10+7\times 20 & 14\times 12+7\times 22\\ 12\times 10+8\times 20 & \underbrace{\boxed{12\times 12+8\times 22}}_{\text{(3,2)成分}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}330 & 378\\ 280 & 322\\ 280 & 320\end{pmatrix}$$

行列の積は、Aの列の数とBの行の数が等しいときに限り計算ができる。
(m×k行列)×(k×n行列)=(m×n行列)

行列の積の計算法則

A,B,Cを行列、kを実数とすると

k**(AB)=**$(k$ **A)B=A(**k **B)**

(AB)C=A(BC)

(A+B)C=AC+BC

A(B+C)=AB+AC

練習:

A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **E=** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

B= $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

AB, BA, AE, EA, を計算せよ。

一般にはAB≠BA

単位行列と一般の正方行列Aの積は、

AE＝A、EA=AよりAE=EA。

掃き出し法で
連立一次方程式を解く

$$
\begin{cases}
x + 2y + z = 8 \\
x + 4y + 3z = 18 \\
x + y + 7z = 24
\end{cases}
$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 18 \\ 1 & 1 & 7 & 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & 6 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 6 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

行基本変形

１．ある行に０以外の定数を掛ける
→方程式に０以外の定数を掛けてもよい。

２．ある行に他の行の定数倍を加える
→ある方程式に、他の方程式の定数倍を加えてもよい。

３．２つの行を入れ換える
→方程式の順番を入れ換えてもよい。

下記連立方程式を行基本変形で解く

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ x - 2y + 2z = 3 \\ -x + 3y - 2z = -1 \end{cases}$$

Step1 係数だけを集める行列をつくる

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Step2 第１行と第２行を入れ換え

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Step3 第２行に第１行の-2倍を加え
第３行に第１行を加え

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Step4 第２行と第３行を入れ換え

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -7 & -11 \end{pmatrix}$$

Step5 第1行に第2行の2倍を加え
第３行に第2行の-5倍を加え

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{pmatrix}$$

Step6 第3行に-$\frac{1}{7}$を掛けて

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Step7 第1行に第3行の-2倍を加え

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

方程式にもどして、解は

$$x=1 \quad y=2 \quad z=3$$

練習：次の連立方程式を掃き出し法で解きなさい。

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + 3y = -5 \end{cases}$$

行列の割り算はありますか？

正方行列Aに対して、

AX=XA=E

となるXをAの**逆行列**いいA^{-1}で表す。
ここで、Eは単位行列。

掃き出し法で逆行列を求めることができる

行列$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$を行基本変形して、

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{25}{14} & -\frac{13}{14} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{array}\right)$$

にすることができる。

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 1 & 7\end{pmatrix}$$ とし、 $$B=\begin{pmatrix}\frac{25}{14} & -\frac{13}{14} & \frac{1}{7}\\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7}\\ -\frac{3}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7}\end{pmatrix}$$ とするときに

AB　BA　計算しなさい。

AB=BA=E

BをAの逆行列といいA^{-1}で表す。

逆行列を用いて連立方程式を解くことができる

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ x + 4y + 3z = 18 \\ x + y + 7z = 24 \end{cases}$$

東京大学 THE UNIVERSITY OF TOKYO

UTokyoGSC

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, X= $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,B= $\begin{pmatrix} 8 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ AX=B $\Rightarrow$ $A^{-1}AX=A^{-1}B$ $\Rightarrow$ $X=A^{-1}B$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{14} & -\frac{13}{14} & \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{3}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

東京大学 THE UNIVERSITY OF TOKYO

UTokyoGSC

練習：逆行列を用いて次の連立方程式を解きなさい。

$$
\begin{cases}
x + y + z = 1 \\
x + 2y + 3z = 3 \\
x + 3y + 6z = 8
\end{cases}
$$

連立方程式の解と行列

復習:

ｘについての１次方程式$ax = b$を解くと

$a \neq 0$のときに、$x = \frac{b}{a}$

$a = 0$ かつ$b = 0$のとき、解xは任意の数

$a = 0$ かつ$b \neq 0$のとき、この方程式を満たすxは存在しない。解なしとなる。

階段行列

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

成分の下の成分がすべて0の行列を**階段行列**という。
さらに、0でない行の数をこの行列の**階数**という。
上の例の行列の階数は3で、rank$A$=3と表す。

ただ1組の解をもつ

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ x - 2y + 2z = 3 \\ -x + 3y - 2z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

rank$A$=3

rank$B$=3

n元１次連立方程式の係数行列をA、拡大係数行列をBとすると
ただ１組の解をもつ $\Leftrightarrow$ rankA=rankB=n

無数の解をもつ

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 4 \\ 3x + y + 3z = 7 \end{cases}$$

rank$A$=2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank$B$=2

n元１次連立方程式の係数行列をA、拡大係数行列をBとすると
無数の解をもつ $\Leftrightarrow$ rankA=rankB<n

解なし

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x+3y+2z=13 \\ 3x+y+3z=14 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 13 \\ 3 & 1 & 3 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

rank$A$=2

rank$B$=3

n元１次連立方程式の係数行列をA、拡大係数行列をBとすると解を持たない ⇔ rankA<rankB

キーワードまとめ

行列

行列の和・差・積

正方行列

単位行列

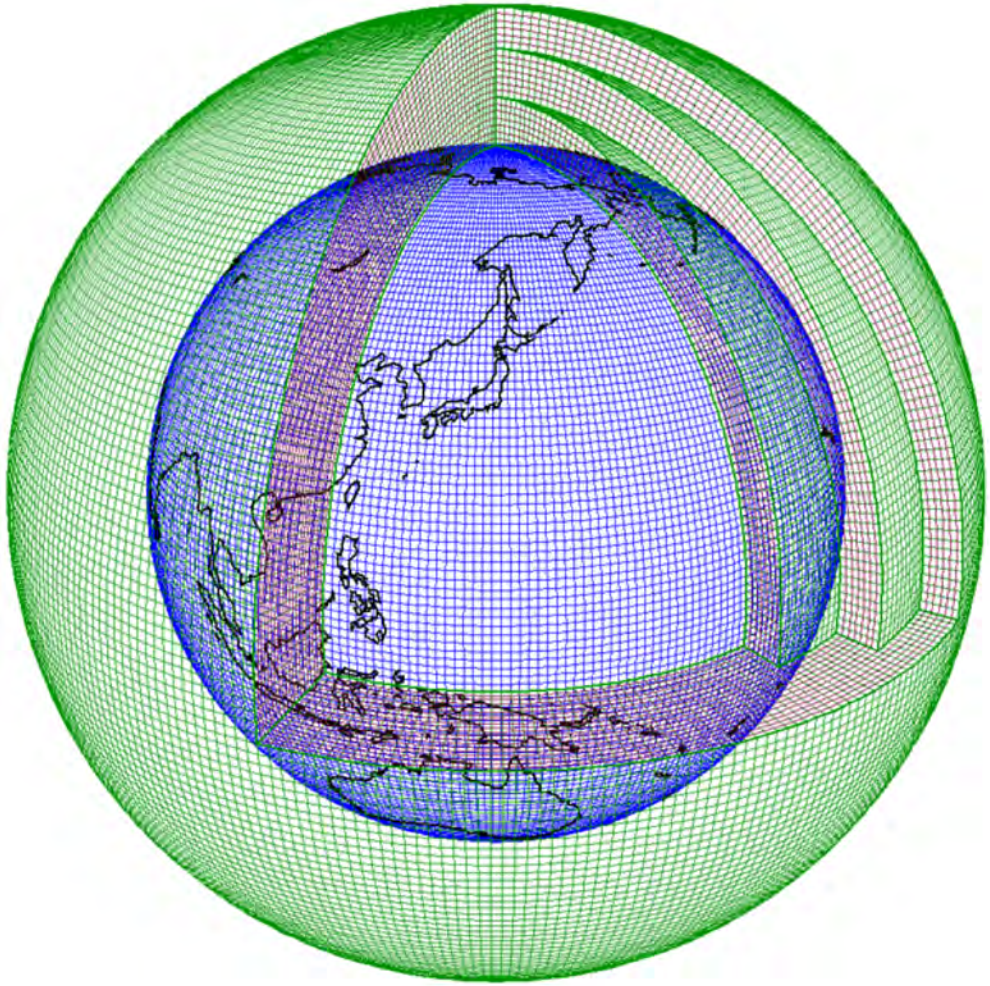
逆行列

掃き出し法

階段行列

行列計算は面倒？

応用例１：気象予報に役立つ



この緑の格子はなんだと思う？

出典：気象庁

数値天気予報モデル
(天気の移り変わりを計算)

初期
状態

予報

ひとつひとつの格子点の
気圧、
気温、
風などの値
を世界中から送られてくる

風や気温などの時間変化を計算し、
将来の大気の状態を予測すること

$\boldsymbol{x_1}$を求めるには

$$y_1 = ax_1 + b$$

$\boldsymbol{x_1, x_2}$を求めるには

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2$$

$x_1, x_2,$ ・・・x_nを求めるには

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - b_1 \\ \vdots \\ y_n - bn \end{pmatrix}$$

線形代数の基礎理論に基づいて
コンピュータを使って計算！

線形代数の世界へ
ようこそ！

主要参考資料

①「これだけ！線形代数」　石井俊全(著)

②「文系のための線形代数・微分積分」

木内 保 (著), 新田 義彦 (著), 三浦 伸夫 (著), 鈴木 俊夫 (著), 岡部 恒治（監修)

③「はじめての線形代数」　小林正道（著）